## 3. ECUACIONES.

### 3.1. Introducción.

Recordemos que el valor numérico de un polinomio (y, en general, de cualquier expresión algebraica) se calcula sustituyendo la/s variable/s por números (que, en principio, se nos proporcionan) y realizando las cuentas indicadas, con lo que obtenemos un número que es el llamado *valor numérico* del polinomio para esos valores de la variable. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = -x^3 + x^2 - x + 1 \\ x = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p(-2) = \left[-x^3 + x^2 - x + 1\right]_{x=-2} = -(-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 1 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

Realicemos la división $\dfrac{-x^3 + x^2 - x + 1}{x+2}$:

| | $-x^3$ | $x^2$ | $-x$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | **-1** | **1** | **-1** | **1** |
| **-2** | | 2 | -6 | 14 |
| | **-1** | **3** | **-7** | **15** |

Observemos que el valor numérico del polinomio *p(x)* en *x*=-2 [*p(-2)*], coincide con el resto de dividir dicho polinomio entre *x*+2 (dividir por Ruffini el polinomio donde queremos sustituir, poniendo como divisor el valor que vamos a sustituir). Esto NO es una casualidad, sino que es una propiedad que cumplen todos los polinomios de una variable y que se llama *Teorema del Resto:*

"El resto dividir un polinomio *p(x)* entre un binomio de la forma *x-a* es igual que el valor numérico de *p(x)* para *x=a*, es decir, *p(a)*": $\boxed{resto\left(\dfrac{p(x)}{x-a}\right) = p(a)}$

¿Por qué es tan importante esta propiedad de los polinomios?

-Para empezar, nos proporciona otra forma de calcular valores numéricos de polinomios de una variable, que es bastante más cómoda puesto que consiste en realizar una división por Ruffini, mientras que el otro procedimiento nos obliga a realizar una operación combinada con potencias, productos y sumas/restas.

-Pero además, tiene otras aplicaciones. Veamos otra en un ejemplo:

*) $\left.\begin{array}{l} p(x) = -x^3 + x^2 - x + 1 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left[-x^3 + x^2 - x + 1\right]_{x=1} = -(1)^3 + (1)^2 - (1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

*) $\dfrac{-x^3 + x^2 - x + 1}{x-1}$:

| | $-x^3$ | $x^2$ | $-x$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | **-1** | **1** | **-1** | **1** |
| **1** | | -1 | 0 | -1 |
| | **-1** | **0** | **-1** | **0** |

$$\Rightarrow \; -x^3 + x^2 - x + 1 = (x-1)\cdot(-x^2 - 1) + 0 = (x-1)\cdot(-x^2 - 1)$$

Como el resto de la división es cero o, lo que es lo mismo, al calcular *p(1)* hemos obtenido como valor numérico ***0***, al aplicar la prueba de la división hemos conseguido descomponer el polinomio en dos factores. Por tanto, hemos conseguido escribir el polinomio de forma que la operación más importante no sea la suma, sino el producto, y esto tiene la misma importancia y las mismas aplicaciones (y muchas más) que conseguir descomponer un número en factores primos.

Llegados a este punto es importante responder a las dos siguientes cuestiones:

a) ¿cuáles son los polinomios primos (esto es, los que no se pueden descomponer)?

b) ¿cómo localizar los números en los que el valor numérico del polinomio es ***0***?

Otro ejemplo nos sirve para intuir la respuesta a la primera pregunta (y seguir comprobando el teorema del Resto):

$\left[x-7\right]_{x=7}=7-7=0$ y
$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 7 \\ 7 & & -7 \\ \hline & -1 & \boxed{0} \end{array}$$
$\Rightarrow \quad x-7=1\cdot(x-7)$

$\left[-2x-3\right]_{x=\frac{-3}{2}}=-2\cdot\frac{-3}{2}-3=3-3=0$ y
$$\begin{array}{c|cc} & -2 & -3 \\ \frac{-3}{2} & & 3 \\ \hline & -2 & \boxed{0} \end{array}$$
$\Rightarrow \quad -2x-3=-2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)$

Por tanto, parece y, en efecto, así es, que podemos afirmar que los polinomios primos son los de primer grado con coeficiente líder ***1***. Posteriormente descubriremos que, trabajando en el conjunto de los números reales, aparecerán otros polinomios que tampoco se podrán descomponer, pero ya comentaremos eso más adelante. Así pues, encontrar los números cuyo valor numérico es cero no sólo nos sirve para descomponer el polinomio en factores, sino que, además, éstos son primos (ya que el divisor de la división de Ruffini siempre es un polinomio de primer grado con coeficiente líder uno). Luego, aún cobra mayor trascendencia, si cabe, dar respuesta a la segunda pregunta planteada.

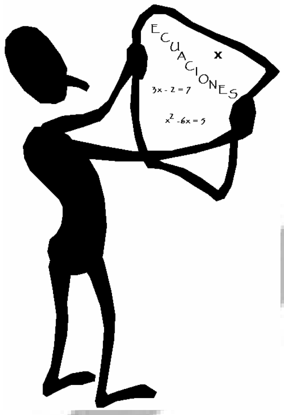
Para empezar, debemos decir que los números cuyo valor numérico es cero reciben el nombre de *raíces* o *ceros* del polinomio. El objetivo consiste, por tanto, en encontrar dichas raíces, o lo que es lo mismo, los valores que hacen que el polinomio valga cero: *p(x)*=0. Este tipo de expresiones son las que, en adelante, van a centrar nuestra atención: las ecuaciones polinómicas.

Debemos comentar que ésta que hemos planteado, es una de las muchas motivaciones que se pueden utilizar para justificar la importancia que tiene la resolución de ecuaciones. Pero existen otras muchas razones para motivar este tema. Por ejemplo, la resolución de ciertos problemas que no se pueden realizar únicamente mediante operaciones aritméticas o que, aún pudiéndose hacer de esa manera, la utilización del lenguaje algebraico facilita su resolución. Valgan como ejemplos:

-"Calcula el lado de un cuadrado si su hipotenusa mide ***5*** cm"

-"Calcula un nº cuya diferencia con su cuadrado sea igual a ***-6***"

**3.2. Definiciones generales.**




Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones algebraicas (contiene una o varias incógnitas o variables, cuyo valor se desconoce).

a) Resolver una ecuación es hallar los valores de la/s variable/s que hacen que la igualdad se cumpla.

b) La expresión que está a la izquierda del signo = es el primer miembro de la ecuación y la que está a la derecha, el segundo miembro.

$$\underbrace{4x - 5}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{x + 10}_{\text{segundo miembro}}$$

1. Cuando se resuelve una ecuación, siempre se debe comprobar. La comprobación consiste en reemplazar la/s variable/s por el valor hallado como solución. No se hace transposición de términos, sino que se realiza la cuenta que queda en el primer miembro y la que queda en el segundo, y la ecuación se debe verificar, es decir, no deben encontrarse contradicciones como 2=5, sino verdades del tipo 2=2.
2. Las *ecuaciones equivalentes* son las que tienen las mismas soluciones.
3. Siempre que cumplas la siguiente norma: "Realiza <u>la misma operación</u> en los dos miembros", transformarás una ecuación en otra equivalente. Así pues, si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número, o se los multiplica o divide por un mismo número distinto de cero, o se los eleva a un mismo exponente o saca una raíz del mismo índice, resulta otra ecuación que es equivalente. Estas propiedades permiten realizar la llamada ***<u>"transposición de términos"</u>***, que consiste en trasladar términos de un miembro a otro y que se resumiría, en términos generales, de la siguiente manera:

   a) Un término que está sumando en un miembro, puede pasar restando al otro y viceversa.

   b) Un factor que multiplica a todo un miembro, puede pasar dividiendo a todo el otro miembro y viceversa.

   c) Las potencias y raíces que afectan directamente a la variable pasan al otro miembro con su operación contraria, es decir la raíz y la potencia.

   Ahora bien, es importante llamar la atención sobre dos hechos:

   -para que la transposición de términos sea menos compleja debemos realizar previamente todas las operaciones que podamos y, por supuesto, cumpliendo las normas.

   -la transposición de términos siempre se realiza en el orden inverso al que indican las normas de las operaciones combinadas, esto es, primero se transponen los sumandos, después los factores y, por último, las potencias y raíces.

**3.3. Ecuaciones lineales o de primer grado.**

(A) Una *ecuación de primer grado* es aquella en la que, después de realizadas todas las cuentas, la transposición de todos los términos al mismo miembro y otra vez las cuentas que se puedan hacer, proporcionan un polinomio de primer grado (la/s variable/s tienen, como mucho, exponente uno) igual a cero.

(B) *Ejemplos:*

OJO

| No es la única manera, sino sólo una opción (la más recomendable). |
|---|

Ejemplo 1:

$3\cdot(x-2)-4\cdot(3-2x)=x-4$ haciendo las cuentas (aplicando propiedad distributiva)

$3x-6-12+8x=x-4$

$11x-18=x-4$ haciendo transposición de términos

$11x-x=-4+18$ sumando en ambos miembros

$10x=14$ haciendo transposición de términos

$x=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}=1,4 \quad \Rightarrow \quad Solucion=\{7/5\}$

Comprobación:

$1^{er}\,miembro: \quad 3\left(\frac{7}{5}-2\right)-4\cdot\left(3-2\cdot\frac{7}{5}\right)=3\cdot\frac{-3}{5}-4\cdot\left(3-\frac{14}{5}\right)=\frac{-21}{5}-4\cdot\frac{1}{5}=\frac{-9}{5}-\frac{4}{5}=\frac{-13}{5}$

$2^{o}\,miembro: \quad \frac{7}{5}-4=\frac{7-20}{5}=\frac{-13}{5}$

Ejemplo 2:

$\frac{4}{x+1}=\frac{6}{2x-3}$ multiplicando en cruz

$4\cdot(2x-3)=6\cdot(x+1)$ aplicando propiedad distributiva

$8x-12=6x+6$ transponiendo términos

$8x-6x=6+12$ sumando términos semejantes

$2x=18$ transponiendo términos

$x=18/2=9$ entonces:

$Solucion=\{9\}$

Comprobación:

$1^{er}\,miembro: \quad \frac{4}{9+1}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$2^{o}\,miembro: \quad \frac{6}{2\cdot 9-3}=\frac{6}{18-3}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

Ejemplo 3:

$$\frac{3x-1}{2}-3=\frac{x}{3}+1$$ sacando común denominador para realizar las sumas

$$\frac{9x-3-18}{6}=\frac{2x+6}{6}$$ multiplicando todo por 6 y simplificando

$9x-3-18=2x+6$ haciendo las cuentas

$9x-21=2x+6$ transponiendo términos

$9x-2x=6+21$ sumando términos semejantes

$7x=27$ transponiendo términos

$$x=\frac{27}{7}=3{,}85\ldots \quad\Rightarrow\quad Solucion=\{27/7\}$$

Comprobación:

$$1^{er}\ miembro:\ \frac{3\cdot\frac{27}{7}-1}{2}-3=\frac{\frac{81}{7}-1}{2}-3=\frac{\frac{74}{7}}{\frac{2}{1}}-3=\frac{\cancel{2}\cdot 37\cdot 1}{7\cdot\cancel{2}}-3=\frac{37}{7}-3=\frac{16}{7}$$

$$2^{o}\ miembro:\ \frac{\frac{27}{7}}{3}+1=\frac{\frac{27}{7}}{\frac{3}{1}}+1=\frac{3\cdot 3\cdot\cancel{3}}{7\cdot\cancel{3}}+1=\frac{9}{7}+1=\frac{16}{7}$$

(C) *Ejercicios:*

1. Resolver y comprobar las siguientes ecuaciones:

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $3x+6=0$ | | $2x+4=5$ | |
| $-3x=81$ | | $10+x+14=30+5$ | |
| $18+2x-8=x-25$ | | $8x-6=x+8+6x$ | |
| $4x-13+x=4x-1+5x$ | | $5x+4=20+2x$ | |
| $-4x-6+5x-3=-6x+8-3x$ | | $7\cdot(x-18)=3\cdot(x-14)$ | |
| $4\cdot(x-10)=-6\cdot(2-x)-6x$ | | $3(8x-10)+3(10x+10)=0$ | |
| $3\cdot(2x+1)-5=14-(x+4)$ | | $5\cdot(9x-7)-(7-6x)\cdot 3=63x$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $3(x+6)=-2(5-x)$ | | $2(x+1)-3(x-2)=x+6$ | |
| $-3(1-x)-(1-2x)=-x-2$ | | $-7x+5-3x+x=9-11x-3+4x-1-2x$ | |
| $3x+2(x-7)=5x-8$ | | $-3x+9=2(x-6)$ | |
| $2x+3=4x+6(x-4)-2$ | | $1+4(x-2)-2x=-3x+5(x+1)-12$ | |
| $4(x-2)-2x=-3x+5(x+1)-12$ | | $1+4(x-2)=-3x+5(x+1)-12$ | |
| $1+4(x-2)=-3x+5(x+1)-9$ | | $4\cdot(x-3)-7(x-4)=6-x$ | |
| $3(5x+9)-3(x-7)=11(2x-1)$ | | $-2+3(x-1)=-12+5(2-x)$ | |
| $5(x-1)-6x=-3(-x+3)$ | | $-5(x-1)+6x=-3(-x-3)-2$ | |
| $-7(-2x+5)-10x+3=9-3(-x+4)+x$ | | $8x+8-3x+7=-x+3-6(-2-x)$ | |
| $4(x+7)=-35-3x$ | | $3(x-1)+5x=6(x+2)+2x$ | |
| $5(x-3)-2(2x-1)=x+3$ | | $5(x-3)-2(2x-7)=x+1$ | |
| $(-3x-4)\cdot 3=3\cdot(2x+1)-6$ | | $3x+2(5-3x)=2x+15$ | |
| $-x+(-x-3)\cdot 2+17=3\cdot(-x+5)-4$ | | $(2x-4)\cdot 2+2\cdot(-5x+1)=12-6x$ | |
| $(-x-4)\cdot 2=3\cdot(-3x+1)+12$ | | $200-\left[8\cdot(4\cdot x-2)-2\cdot(5\cdot x-1)\right]=148$ | |
| $(x+1)\cdot(x-1)=x^2+2x+1$ | | $(x+1)\cdot(x+1)=x^2+2x+1$ | |
| $(x-1)^2=x^2+2x+1$ | | $(x-1)\cdot(-x+1)=-x^2+2x-5$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $5+9x+1=5x+6+4x$ | | $12-5(2-x)=12+6x$ | |
| $3(x-6)=4(x+3)$ | | $(x+5)\cdot(x-3)-(x-2)\cdot(x+2)=3$ | |
| $5x-2+3x=-4+4x-8+4x$ | | $x-2=2-x$ | |
| $2\cdot(3x-1)+3\cdot(x+1)=2\cdot(x-1)$ | | $-4(x-5)-2x=-3x-8$ | |
| $\frac{2x-1}{5}-7=\frac{3}{10}x+1$ | | $\frac{15}{x+1}=\frac{5}{3}$ | |
| $\frac{3x-1}{5-x}=\frac{5}{30}$ | | $\frac{1}{2}=\frac{5}{3}-\frac{5x+3}{3x}$ | |
| $\frac{15}{x-3}=\frac{5}{3}$ | | $5x-\frac{1}{2}=\frac{14}{3}-\frac{3x-2}{5}$ | |
| $\frac{1-2x}{4}-9=\frac{1}{2}x+3$ | | $\frac{2x-3}{4}-9=\frac{3}{2}x+1$ | |
| $\frac{2x-2}{3+3x}=\frac{3}{2}$ | | $\frac{1-x}{2}-4=\frac{1}{4}x+6$ | |
| $\frac{15}{x-3}=\frac{2}{1-2x}$ | | $-\frac{3-x}{2}+2=-\frac{1}{4}x-1$ | |
| $\frac{3x-16}{x}=\frac{5}{3}$ | | $\frac{5x-5}{x+1}=3$ | |
| $\frac{2x+1}{-3x+1}=-1$ | | $\frac{2x-1}{3}=\frac{4x+2}{5}$ | |
| $\frac{x+5}{2}=\frac{2x+3}{3}$ | | $\frac{3x+1}{6}=\frac{x+1}{4}$ | |
| $\frac{x-11}{6}=\frac{x-5}{3}$ | | $\frac{x-11}{6}-\frac{x-5}{3}=0$ | |
| $\frac{3x+1}{6}-\frac{x+1}{4}=0$ | | $\frac{x}{2}-4=\frac{x}{3}-3$ | |
| $\frac{x}{4}+\frac{5}{2}=\frac{x}{6}-5$ | | $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=-\frac{5}{6}$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $\frac{x+2}{8}-\frac{x-2}{4}=0$ | | $\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}=15$ | |
| $\frac{4x-6}{5}=\frac{x}{3}-\frac{4}{15}$ | | $\frac{x}{3}-\frac{1}{3}+\frac{-x}{4}-\frac{-1}{4}=-\frac{-x}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{x}{6}$ | |
| $\frac{x-3}{2}-\frac{3x}{7}=0$ | | $\frac{x-2}{3}-\frac{5x-36}{4}=-1-\frac{12-x}{2}$ | |
| $\frac{2(x+3)}{5}-\frac{4-x}{2}=1$ | | $\frac{x}{2}-x=-2-\frac{x+1}{7}$ | |
| $7-\frac{3x+2}{5}=-2x+\frac{x+1}{2}$ | | $\frac{5}{4}x+2=\frac{3}{4}x+18$ | |
| $\frac{1}{7}x-11=13-x$ | | $\frac{10x+3}{3}+\frac{3x-1}{5}=x-2$ | |
| $x-\frac{x+1}{2}=3$ | | $5x+\frac{5}{2}=2x+\frac{1}{2}\cdot(3-2x)$ | |
| $\frac{15}{2}x-\frac{1}{4}x=\frac{5}{2}$ | | $x=3+\frac{1}{2}\cdot(x+1)$ | |
| $x-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x=16-\frac{2}{9}x-\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=43-5x$ | |
| $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=-13+2x$ | | $\frac{1}{6}\cdot(8-x)+(x-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot(x+6)-\frac{x}{3}$ | |
| $\frac{3(x-2)}{4}-\frac{3-3x}{8}-\frac{x-4}{2}=-1-x$ | | $\frac{3x-7}{4x+2}=\frac{3x-14}{4x-13}$ | |
| $\frac{3x+7}{2}-\frac{x+1}{4}=2x-\frac{5x-3}{6}$ | | $\frac{5-2x}{x}=8$ | |
| $\frac{-2x+1}{3}-\frac{2-x}{6}=3-\frac{-3x+4}{2}$ | | $\frac{3+(x+1)\cdot 3}{x}=\frac{4}{3}$ | |
| $\frac{x+3}{2}+\frac{x-5}{4}=2\cdot(x-3)$ | | $3\cdot\frac{x+2}{2}+\frac{x-6}{4}=40$ | |
| $\frac{x-3}{4}=\frac{x+5}{6}-\frac{x-1}{9}$ | | $3x+\frac{4x-3}{6}=\frac{3x-4}{9}+\frac{12x-7}{3}$ | |
| $\frac{5-x}{4}-\frac{x+3}{6}=\frac{9-x}{4}-\frac{6x-2}{16}$ | | $\frac{3-4x}{2}-\frac{4x+5}{4}-\frac{1-2x}{2}=0$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $\frac{x+1}{2}-\frac{x}{3}=\frac{7x}{6}-9$ | | $\frac{3x-4}{2}+\frac{2x-3}{3}=5x-3$ | |
| $\frac{3x-4}{5}-\frac{2x-7}{5}=\frac{1+2x}{5}$ | | $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}=-1-\frac{x}{5}$ | |
| $\frac{4x+6}{5}-\frac{2x-3}{3}=\frac{4x-6}{6}$ | | $\frac{x+1}{4}-\frac{x-2}{3}=\frac{x+3}{2}-x-1$ | |
| $\frac{6-2x}{20}-\frac{x+5}{10}=\frac{3x}{15}-\frac{3x-4}{5}$ | | $\frac{x+2}{2}-\frac{x+3}{3}=\frac{x+4}{4}-\frac{x-5}{5}$ | |
| $\frac{2x-2}{3}+\frac{4x+8}{4}-4=\frac{2-x}{5}$ | | $\frac{4+5x}{2}-\frac{4x-1}{7}=\frac{9x+6}{4}$ | |
| $\frac{x}{4}-\frac{x-2}{5}=5+\frac{14-x}{2}-\frac{5x}{12}$ | | $\frac{3x-5}{4}-\frac{7x+9}{16}+\frac{8x+19}{8}+\frac{69}{8}=0$ | |
| $\frac{x-7}{5}-\frac{x-11}{6}+\frac{x-10}{7}=2$ | | $\frac{3x+5}{2}-\frac{x+5}{4}+\frac{2x-3}{5}=-x$ | |
| $\frac{3x-4}{2}-\frac{5x+4}{6}=4-\frac{4x-4}{3}$ | | $1-\frac{2x+3}{6}=\frac{x-12}{20}-\frac{4x}{8}$ | |
| $\frac{5x+1}{5}=x+\frac{x-8}{4}$ | | $\frac{3x-4}{5}-\frac{2x-3}{3}=\frac{3x-9}{12}$ | |
| $\frac{4x-1}{3}+\frac{2x}{7}=\frac{5x+4}{4}-\frac{2x}{5}$ | | $\frac{3}{4}(2x-1)-\frac{4}{5}(x-3)=\frac{1}{2}x-2$ | |
| $\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x+4}{15}+1=x-\frac{3(x-2)}{5}$ | | $\frac{2(x-3)}{7}-\frac{1-6x}{14}+\frac{5(x-2)}{2}=1$ | |
| $\frac{3}{2}x-4\left(\frac{x}{2}-2x\right)+2x+7=\frac{3}{2}+\frac{4(3x-2)}{5}$ | | $\frac{1}{2}\left(\frac{2x-5}{3}-\frac{x+3}{2}\right)=\frac{1}{5}\left[\frac{5}{4}+\frac{10x-5}{3}-(2x-3)\right]$ | |
| $\frac{1}{6}\left[2x-1-3\left(\frac{5x}{3}-1\right)\right]+(x-3)2+6=\frac{1}{3}$ | | $\frac{3}{4}\cdot\left[2x-\left(1-\frac{x+2}{3}\right)\right]=\frac{2-x}{5}$ | |
| $\frac{1+\frac{x}{2}}{x+\frac{1}{2}}=\frac{5}{7}$ | | $\frac{x-\frac{x-3}{1-\frac{2}{3}}}{1+\frac{1+\frac{3}{4}}{4-\frac{5}{3}}}\cdot\frac{7}{4}=\frac{\frac{2x}{3}}{1-\frac{3+\frac{1}{3}}{10}}$ | |
| $\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{10}=\frac{x-3}{4}-\frac{x-1}{2}+\frac{(x+3)^2}{10}$ | | $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x-4}{6}=\frac{3x-4}{2}-\frac{x+2}{4}$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}\cdot\left[8-\frac{x}{3}-2\cdot\left(\frac{x}{2}+5\right)\right]-\left[6-\frac{3x}{2}+3\cdot(x-5)\right]=-5$ | | $(x+1)\cdot(x-1)+\frac{x+2}{2}=(x+1)^2$ | |
| $\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$ | | $\frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{3}{4}-1}-\frac{\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{3}}{\frac{2}{3}-1}-(x-2)\cdot(x-3)=1$ | |
| $\frac{\frac{-x+1}{5}-\frac{x+2}{2}}{3}=\frac{x+3-\frac{x}{3}}{2}$ | | $\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{x-\frac{2}{3}}{4}=\frac{2-x}{6}-\frac{\frac{x}{2}-3}{12}$ | |
| $\frac{x-4}{5}+\frac{3(x-2)}{15}=\frac{1}{10}-\frac{x-1}{2}$ | | $\frac{x-1}{5}-\frac{x+2}{10}+\frac{1-3x}{15}=\frac{x+2}{30}$ | |
| $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x-2}{8}+3\cdot\left(x-\frac{4x-1}{2}\right)=3x$ | | $5x-\frac{3+4x}{2}+\frac{3x-5}{6}=0$ | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

2. Unir cada ecuación con su solución sin resolverlas (verificando):

a) $2(x-3)-4=x-9$ A) -2

b) $\frac{2x-1}{3x}=\frac{1}{2}$ B) No tiene solución

c) $\frac{7x}{2}-4=3x-5$ C) 1

d) $5x-(x+6)=x$ D) 2

e) $\frac{5x}{10}=\frac{x-6}{2}$ E) Ninguna de las anteriores

3. Encontrar el error de cada una de las resoluciones y justificar:

a) $\frac{6}{5x}=\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\cdot 2}{5\cdot 6}$

b) $\frac{4x}{3}=5 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{20}{3}$

c) $-\frac{x}{3}=5 \quad \Rightarrow \quad x=15$

d) $3x-14=x+2-16 \quad \Rightarrow$ no tiene solución

e) $\frac{1}{5}x=\frac{2}{5}+1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{5}+5$

f) $2x=\frac{3}{2}+x \quad \Rightarrow \quad 4x=3+x \quad \Rightarrow \quad 3x=3 \quad \Rightarrow \quad x=1$

g) $-2x=6 \quad \Rightarrow \quad x=6+2 \quad \Rightarrow \quad x=8$

h) $-2x=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad x=3$

i) $\frac{3+x}{3}=\frac{30}{6} \quad \Rightarrow \quad 6\cdot 3+x=3\cdot 30 \quad \Rightarrow \quad 18+x=90 \quad \Rightarrow \quad x=72$

**3.4. Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.**

(A) Una *ecuación de segundo grado* es aquella en la que, después de realizadas todas las cuentas, la transposición de todos los términos al mismo miembro y otra vez las cuentas que se puedan hacer (en adelante lo llamaremos "arreglada"), proporcionan un polinomio de segundo grado (la/s variable/s tienen, como mucho, exponente dos) igual a cero. Por tanto, son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

término cuadrático | término independiente | término lineal

donde "$a$" es el coeficiente cuadrático, "$b$" es el coeficiente lineal y "$c$" es el coeficiente o término independiente. Estas ecuaciones se presentan igualadas a cero y pueden ser del tipo completas (consta de los tres términos mencionados) o incompletas (falta el término lineal y/o cuadrático).

(B) <u>RESOLUCIÓN DE ECUACIONES COMPLETAS</u>

Para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, se aplica la fórmula $\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$

NOTA: Esta fórmula no es difícil de deducir pero no es el objetivo de este curso hacerlo, sólo se acepta, se aplica y se verifican las soluciones.

*Ejemplo*:

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

reemplazando por los coeficientes: a = 2 ; b = 6 y c = -8

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2.2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$

calculando cada solución (sumando y restando el valor de la raíz)

$$x_1 = \frac{-6 + 10}{4} = \frac{4}{4} \quad \Rightarrow x_1 = 1$$

y

$$x_2 = \frac{-6 - 10}{4} = \frac{-16}{4} \quad \Rightarrow x_2 = -4$$

$$Soluciones = \{-4, 1\}$$

Ésta fórmula también puede utilizarse para resolver ecuaciones incompletas, en la que se deberá completar con "ceros" los términos que faltan.

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto las distintas posibilidades que se pueden dar en una ecuación de 2º grado:

* $-3x^2-5x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot(-3)\cdot(-2)}}{2\cdot(-3)}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{-6}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{-6}=\dfrac{5\pm 1}{-6}=\begin{cases}\dfrac{5+1}{-6}=\dfrac{6}{-6}=-1\\ \dfrac{5-1}{-6}=\dfrac{4}{-6}=\dfrac{-2}{3}\end{cases} \Rightarrow Soluciones=\left\{-1,\dfrac{-2}{3}\right\}$

* $\dfrac{x}{3}-1+\dfrac{x^2}{2}=-\dfrac{2x^2}{3}+x-\dfrac{7}{6} \Rightarrow 2x-6+3x^2=-4x^2+6x-7 \Rightarrow 7x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-28}}{14}=\dfrac{4\pm\sqrt{-12}}{14}\notin\mathbb{R} \Rightarrow Solucion=\varnothing$

* $-4x^2+3=5x^2-6x+4 \Rightarrow -9x^2+6x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-36}}{-18}=\dfrac{-6\pm 0}{-18}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow Soluciones=\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$

* $27x^2-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{0\pm\sqrt{0+324}}{54}=\dfrac{0\pm 18}{54}=\begin{cases}\dfrac{-18}{54}=\dfrac{-1}{3}\\ \dfrac{18}{54}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow Soluciones=\left\{-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$

* $-7x^2+9x=0 \Rightarrow x=\dfrac{-9\pm\sqrt{81+0}}{-14}=\dfrac{-9\pm 9}{-14}=\begin{cases}\dfrac{-18}{-14}=\dfrac{9}{7}\\ \dfrac{0}{-14}=0\end{cases} \Rightarrow Soluciones=\left\{0,\dfrac{9}{7}\right\}$

Como podemos observar, la clave está en la expresión que aparece, en la fórmula, dentro de la raíz. Esta expresión, $\Delta=b^2-4ac$, recibe el nombre de *discriminante* de la ecuación de segundo grado, puesto que "discrimina" o señala el nº de soluciones que va a tener la ecuación:

$-3x^2-5x-2=0 \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4\cdot(-3)\cdot(-2)=25-24=1>0 \Rightarrow 2$ soluciones reales y distintas

$-9x^2+6x-1=0 \Rightarrow \Delta=36-36=0 \Rightarrow 2$ soluciones reales e iguales

$7x^2-4x+1=0 \Rightarrow \Delta=16-28=-12<0 \Rightarrow$ sno hay soluciones reales (dos soluciones complejas)

(C) <u>RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO INCOMPLETAS</u>:

En los ejemplos anteriores hemos resuelto un par de ecuaciones incompletas por la fórmula general. Vamos ahora a analizar otra manera de resolverlas que, lógicamente, es más fácil y rápida, lo que nos hace recomendar la utilización de los procedimientos siguientes para la resolución de este tipo de ecuaciones de 2º grado (<u>sólo las incompletas</u>).

I. Falta el término lineal: $\boxed{ax^2+c=0}$

*Ejemplos:*

$a)\ x^2-16=0$ haciendo transposición de términos

$x^2=16$ pasando la potencia como raíz

$x=\pm\sqrt{16}=\pm 4$ ya que tanto ***4*** *como* ***-4*** elevados al cuadrado dan ***16***

$Soluciones=\{-4,4\}$

$b)\ 2x^2+3=0 \Rightarrow 2x^2=-3 \Rightarrow x^2=\dfrac{-3}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{-3}{2}}\notin\mathbb{R}$

$Soluciones\ reales=\{\ \}=\varnothing$

II. Falta el término independiente: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

*Ejemplo*:

$2x^2 - 8x = 0$ sacando factor común

$2x \cdot (x - 4) = 0$ si un producto es cero, alguno de los factores es cero:

$$\begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ ó \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$Soluciones = \{0, 4\}$

Podemos observar las siguientes características de las ecuaciones cuadráticas incompletas:
a) Si son incompletas de término lineal, pueden no tener solución real o tener dos soluciones reales distintas que serán siempre opuestas.
b) Si son incompletas de término independiente, siempre van a tener solución: una de ellas va a ser el ***0*** y, si hay término lineal, la otra será distinta de ***0*** (en caso contrario ambas serán ***0***).

(D) *Ejercicios:*

1. Resolver y comprobar las siguientes ecuaciones:

| ECUACIÓN | SOLUCIÓN | ECUACIÓN | SOLUCIÓN |
|---|---|---|---|
| $0 = -x^2 + 81$ | | $x^2 + 2x - 3 = 0$ | |
| $2x^2 - 12x + 18 = 0$ | | $-3x^2 - 6x + 9 = 0$ | |
| $-x^2 = -3x - 10$ | | $4x^2 + 12x = 0$ | |
| $x^2 - 2x = -1$ | | $x^2 + x + 1 = 0$ | |
| $0 = -x^2 + 9$ | | $-x^2 - 4x = 0$ | |
| $2x^2 + 8x + 8 = 0$ | | $-2x^2 - 10x = 0$ | |
| $-3x^2 - 3x + 5 = -x^2 + 5x - 7 - 2x^2 - 8x$ | | $6x^2 - 10x + 2 = 3(2x^2 - 6) - 2(5x - 10)$ | |
| $x^2 + x = 0$ | | $3x^2 = -6x - 3$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $x^2-x=2$ | | $x^2=-8+8x$ | |
| $-x^2=6x$ | | $-x^2+4x-9=0$ | |
| $x\cdot(x+10)=0$ | | $-x^2-16=8x$ | |
| $-3x^2+27=0$ | | $-x^2+4x=0$ | |
| $(x+1)^2=16$ | | $2x^2-3x-1=(x-3)^2$ | |
| $2(x^2-3)-x=-4+x^2-x$ | | $x^2+\frac{3}{2}x=1$ | |
| $(x+2)^2-5x=10$ | | $(x-3)^2=64$ | |
| $x^2+3x+5=0$ | | $x\cdot(x+14)+45=0$ | |
| $(2x-2)^2=3x+7$ | | $(x-9)\cdot(x+2)=0$ | |
| $5-\frac{4x+8}{2x}=\frac{x+2}{4}$ | | $\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{10}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-1}{2}-\frac{(x+3)^2}{10}$ | |
| $(x+2)\cdot(x+3)=0$ | | $25-(2x-1)^2=0$ | |
| $2x^2-8x=0$ | | $x^2+1=0$ | |
| $3x^2=27$ | | $x^2-2x-3=0$ | |
| $x^2+3x-11=17$ | | $2x^2=7x$ | |
| $3x^2+6=11x$ | | $x^2=8x-15$ | |
| $x^2-x=2$ | | $x^2+2x+1=0$ | |
| $-x^2+2x+3=0$ | | $x^2-9=0$ | |
| $x^2+13=12$ | | $x^2+12=13$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $x^2+13=-12$ | | $3x^2-4=28+x^2$ | |
| $-2x^2+10x=0$ | | $-x^2-5+6x=0$ | |
| $-x^2-8x-15=0$ | | $x^2+14x-32=0$ | |
| $6x^2-13x+6=0$ | | $0=3x^2-17x+10$ | |
| $-13x-6=-5x^2$ | | $x^2+6=4$ | |
| $13\cdot(2x-1)\cdot(3-5x)=0$ | | $4\cdot(x^2-1)=4x-1$ | |
| $3(x^2-11)+2(x^2-7)=33$ | | $(x-15)\cdot(x-15)=400$ | |
| $-2x^2-5x=0$ | | $-2x^2+5x=0$ | |
| $(x-1)\cdot(x+1)=0$ | | $x^2+x+1=0$ | |
| $x^2-x-1=0$ | | $\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x-2}$ | |
| $x^3+2x^2-3=-1+x^3+x$ | | $-6x^2-39x-48=0$ | |
| $5\cdot(x^2-7)=3\cdot(4-x^2)+5$ | | $x+\dfrac{1}{x+3}=5$ | |
| $7x^2-49=0$ | | $\dfrac{(x+2)^2}{3}=1$ | |
| $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{5}=0$ | | $5x^2-7x+3=0$ | |
| $2+\dfrac{12}{x-3}=x+3$ | | $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{2}{x-5}$ | |
| $\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{x-5}{2}=0$ | | $\dfrac{5x-7}{9}+\dfrac{14}{2x-3}=x-1$ | |

| ECUACIÓN | SOL. | ECUACIÓN | SOL. |
|---|---|---|---|
| $-x^2+8x-16=0$ | | $2x^2=-3x-1$ | |
| $\dfrac{2x}{x-2}=\dfrac{x}{x-3}$ | | $-4x+2=3(x^2+1)$ | |
| $-5x^2+15x=0$ | | $(-2x+3)\cdot(5x+2)=0$ | |
| $13=-17x-x^2$ | | $-x^2=-8x$ | |
| $(x^2-2x+1)\cdot(x+3)=x^3-7x+6$ | | $x^2-x-6=0$ | |
| $7x^2-5x+2=3(2x^2-6)-4$ | | $16x^2-1=0$ | |
| $6x^2-10x+2=3(2x^2-6)-2(5x-10)$ | | $6x^2-10x+2=3(2x^2-6)-2(5x-11)$ | |
| $4x^2-\dfrac{3}{5}x=0$ | | $\dfrac{5}{3}x^2-\dfrac{4}{2}x=-\dfrac{x}{3}$ | |
| $-8x^2+22x=-21$ | | $-5x^2+51x-88=0$ | |
| $(x-2)^2+x=4-2\cdot(1-x)^2$ | | $(3x-7)^2-6(2-5x)=3x+4(2x^2-1)-13$ | |
| $(x-2)^2-(x+3)^2=x^2+9+5x$ | | $\dfrac{(x+2)^2}{5}-\dfrac{x^2-9}{4}=\dfrac{(x+3)^2}{2}+\dfrac{1}{5}$ | |
| $\dfrac{30}{x-2}-\dfrac{30}{x}=4$ | | $\dfrac{x+8}{x-8}-2=\dfrac{24}{x-4}$ | |
| $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{x-1}{x}$ | | $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{-4}{x^2-9}$ | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

2. Unir cada ecuación con su solución sin resolverlas (verificando):

| | |
|---|---|
| a) $x^2-3x=0$ | A) $-3$ |
| b) $x^2-4x=-4$ | B) $0$ |
| c) $(x-1)^2=0$ | C) $1$ |
| d) $2x^2-18=0$ | D) $2$ |
| e) $x^2-3x+2=0$ | E) $3$ |

3. Encontrar el error de cada una de las resoluciones y justificar:

a) $2x^2-x=3 \quad \Rightarrow \quad x=3$

b) $x^2-1=1 \quad \Rightarrow \quad x=0$

c) $x^2-2=x^2+2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$

d) dada $x^2+5x-6=0$ se resuelve aplicando la fórmula:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot -6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-4-6}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{15}}{2}$$

e) dada $x^2+5x-6=0$ se resuelve aplicando la fórmula:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=-5\pm\frac{\sqrt{25+24}}{2}=-5\pm\frac{\sqrt{49}}{2} \quad \Rightarrow \quad x=-5+\frac{7}{2} \quad \text{ó} \quad x=-5-\frac{7}{2}$$